La estabilidad de la cooperación intergeneracional basada en un bien público familiar

Joaquín Andaluz[a], *José Alberto Molina*[a b], *Iñaqui Vázquez*[a]

[a] *Departo de Análisis Económico. Universidad de Zaragoza, Spain*

[b] *Institute for the Study of Labour-IZA, Bonn, Germany*

Resumen

El trabajo estudia la estabilidad de las soluciones de negociación surgidas en hogares formados por dos cónyuges y un hijo adulto. Para ello, el proceso de toma de decisiones se analiza desde la perspectiva de los modelos no cooperativos de negociación familiar. Bajo una especificación de las preferencias individuales y suponiendo que la fuente de cooperación es la producción de un bien público familiar cuyos factores productivos son las horas aportadas por cada miembro de la familia, se deduce que la estabilidad de la cooperación es menor cuanto mayor es la valoración subjetiva de cada agente de su propia aportación al bien familiar. Con poderes de negociación asimétricos, los incentivos de cada agente a desviarse de la solución negociada son menores cuanto mayor sea su poder de negociación. Por último, la existencia de altruismo entre los agentes aumenta la estabilidad de los acuerdos de negociación.

Palabras clave: Negociación familiar, estabilidad, altruismo.

Departamento de Análisis Económico, Universidad de Zaragoza, Gran Vía 2, 5005 Zaragoza. Tel: +34976762631; e-mail: jandaluz@unizar.es.

Introducción

La aplicación de los modelos de negociación bilateral ha representado un importante avance en el estudio de la toma de decisiones familiares. Uno de los resultados esenciales de dichos modelos es que la demanda familiar no depende únicamente de los recursos totales familiares, sino también de los controlados por cada miembro individualmente. Ello implica que el resultado alcanzado depende de cuál sea el punto de desacuerdo en el proceso de negociación (por ejemplo, la situación de divorcio), en cuyo caso las decisiones llevadas a cabo por los individuos son el resultado de una solución negociada de manera explícita (Manser y Brown 1980, McElroy y Horney 1980, Chen y Wolley 2001, Andaluz y Molina 2007).

No obstante, el divorcio no representa necesariamente el único punto de ruptura en un proceso de negociación familiar (Lundberg y Pollak, 1993, 1994). Un equilibrio no cooperativo igualmente puede constituir el *status quo*, de modo que la interacción repetida entre los agentes a lo largo del tiempo puede conducir a la obtención de soluciones eficientes. Como es sabido, de acuerdo con el teorema de folk, una solución eficiente en el sentido de Pareto puede alcanzarse como un equilibrio de Nash en un juego repetido indefinidamente siempre que exista alguna estrategia de penalización de toda posible desviación y los agentes cuenten con un factor de descuento lo suficientemente alto.

De acuerdo con dicho resultado, una aspecto que surge interesante es el estudio de la estabilidad de los acuerdos de negociación alcanzados de manera tácita en el contexto de los juegos no cooperativos. En este sentido, tal y como Lundberg y Pollak (2003) apuntan, la búsqueda de ganancias privadas por parte de cada esposo, junto con las limitaciones propias de los compromisos a lo largo del tiempo, puede dar lugar a decisiones que no son Pareto- eficientes.

En tales circunstancias, el objetivo del presente trabajo es analizar la estabilidad de las soluciones de negociación que pueden surgir como consecuencia de la repetición de un juego no cooperativo en hogares formados por dos cónyuges y un hijo adulto. Entendemos por estabilidad la ausencia de incentivos a desviarse unilateralmente de un acuerdo por parte de cada uno de los integrantes de la unidad familiar. Bajo una especificación concreta de las preferencias individuales y suponiendo que la fuente de cooperación entre los agentes es la existencia de un bien público de producción familiar, se analiza la influencia de diversos factores sobre el mantenimiento de un posible equilibrio cooperativo representado por la solución de negociación de Nash.

El modelo

Seguidamente, desarrollamos un juego repetido en el que tres miembros de una familia pueden contribuir voluntariamente a la provisión de un bien público familiar. Suponiendo que se desconoce el momento en el que la disolución de la familia tiene lugar, el objetivo de cada agente es la maximización del valor descontado de un flujo de utilidades $\sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} W_j (U_1, U_2, U_3); j = 1,2,3$, donde δ denota el factor de descuento, común para todos los agentes y $W_j(U_1, U_2, U_3)$ indica la función de bienestar del agente j, la cual depende de su propia utilidad y de la utilidad del resto. Formalmente, cada individuo cuenta con una función de bienestar de la forma $W_j = U_j + s\ (U_h + U_k)$ para todo $j \neq k \neq h$; $j, k, h = 1, 2, 3$[1], con $s \in [0, 1]$ denotando el grado de altruismo entre los agentes que, a efectos de simplificación, suponemos idéntico para todos ellos.

Por otra parte, la utilidad de cada agente viene representada por una función del tipo $U_j = U_j (C_j, l_j, Q, z); j = 1,2,3$, donde C_j representa un bien compuesto hicksiano cuyo precio es unitario, l_j denota la cantidad de ocio consumida por el individuo j, Q es un bien público familiar cuya tecnología viene representada por una función de producción Cobb-Douglas cuyos factores son las horas dedicadas a su producción por parte de cada individuo y z es un vector de variables subjetivas que determinan el modo en que cada agente valora sus consumos.

De manera particular, introducimos las siguientes especificaciones de las funciones de utilidad y función de producción:

$$U_j = C_j + Lnl_j + \alpha Lnh_j + (1-\alpha) L(h_h h_k) \forall j \neq h \neq k; j, h, k = 1,2,3.$$

$$Q = h_1 h_2 h_3$$

siendo h_j las horas que el individuo j dedica a la producción del bien familiar y α un parámetro indicador de la valoración subjetiva de la propia aportación realizada a dicho bien.

---

[1] Dichas preferencias se denominan en la literatura "caring preferences" y han sido utilizadas, entre otros, por Bourguignon y Chiappori (1992).

En el desarrollo del equilibrio no cooperativo, los agentes deciden simultáneamente el consumo privado y su contribución a la provisión del bien público familiar, dada la cantidad de dicho bien fijada por los demás. La solución del juego de etapa vendrá dada por el equilibrio de Cournot-Nash. Formalmente, cada individuo debe resolver el problema de optimización condicionada:

$$\underset{(C_i,l_i,h_i)}{\mathbf{Max}} \quad W_i = u_i + s\left(u_j + u_k\right) = C_i + \ln l_i + \alpha \ln h_i + \left(1-\alpha\right)\ln h_j^I h_k^I + $$
$$+ s\left(C_j + \ln l_j + \alpha \ln h_j + \left(1-\alpha\right)\ln h_i^I h_k^I + C_k + \ln l_k + \alpha \ln h_k + \left(1-\alpha\right)\ln h_i^I h_j^I\right)$$

s.a. **i)** $C_i + \omega_i\left(l_i + h_i\right) \le Y_i$

ii) $C_i, l_i, h_i \ge 0$

iii) $Y_i = y_i + \omega_i T$

con *i,j,k*=(*1,2,3*), *i≠j≠k,* y siendo T el total de horas disponibles a distribuir entre ocio, producción familiar y trabajo fuera del hogar, y_i la renta no laboral y w_i el salario hora individual.

A partir de las condiciones de primer orden, podemos obtener las demandas de consumo hicksiano, del ocio y de la aportación individual al bien público familiar:

$$l_i^I = \frac{1}{\omega_i};\ h_i^I = \frac{\alpha + 2s\left(1-\alpha\right)}{\omega_i};\ C_i^I = Y_i - 1 - \alpha - 2s\left(1-\alpha\right)$$

y, a partir de ellas, las correspondientes funciones indirectas de utilidad:

$$W_1^I = Y_1 + s\left(Y_2 + Y_3\right) + \alpha\left(2s-1\right)\ln \omega_1 + \alpha \ln \omega_2\omega_3 +$$
$$+ \left(1+2s\right)\left(\left(2-\alpha\right)\ln\left[\alpha + 2s\left(1-\alpha\right)\right] - 1 - \alpha - 2s\left(1-\alpha\right) - \ln \omega_1\omega_2\omega_3\right)$$

$$W_2^I = Y_2 + s\left(Y_1 + Y_3\right) + \alpha\left(2s-1\right)\ln \omega_2 + \alpha \ln \omega_1\omega_3 +$$
$$+ \left(1+2s\right)\left(\left(2-\alpha\right)\ln\left[\alpha + 2s\left(1-\alpha\right)\right] - 1 - \alpha - 2s\left(1-\alpha\right) - \ln \omega_1\omega_2\omega_3\right)$$

Como ya hemos señalado anteriormente, la repetición del juego da lugar a múltiples equilibrios, alguno de los cuales puede representar una solución Pareto-eficiente. De hecho, los agentes pueden crear implícitamente alguna estrategia que evite toda posible desviación de la solución óptima y que garantice la consecución de una solución eficiente como resultado de un equilibrio de Nash en el juego de etapa.

Una de las posibles estrategias consiste en penalizar a un agente que se desvíe unilateralmente del acuerdo. Específicamente, adoptamos un esquema de penalización muy simple, pero habitualmente utilizado en la literatura, denominado la estrategia del disparador (trigger strategy)[2], según el cual los niveles de consumo privado y del bien público familiar revierten a los de la solución no cooperativa para siempre, una vez que se ha detectado una desviación por parte de alguno de los jugadores. Dicha amenaza es creíble y garantiza el mantenimiento de soluciones que son más eficientes que el equilibrio de Cournot-Nash.

Por otra parte, a efectos de mayor simplificación, consideraremos el caso de trayectorias estacionarias. Una trayectoria de este tipo es sostenible en un equilibrio perfecto en subjuegos si, para todo i, se verifican las siguientes condiciones:

$$W_i^C \geq W_i^I$$

$$\frac{W_i^C}{(1-\delta)} \geq W_i^{NC} + \delta \frac{W_i^I}{(1-\delta)}$$

donde W_i^C y W_i^{NC} denotan los niveles de bienestar obtenidos por el agente i en la solución eficiente y en el equilibrio de desviación, respectivamente. La segunda de las restricciones puede expresarse alternativamente de la forma:

$$\delta \geq \frac{W_i^{NC} - W_i^C}{W_i^{NC} - W_i^I} \equiv \overline{\delta}_i$$

siendo $\overline{\delta}_i$ el factor de descuento crítico del individuo i. Por tanto, la sostenibilidad de la solución óptima requiere que el factor de descuento, común para todos los agentes, sea mayor o igual que el correspondiente valor crítico. En otros términos, cuanto mayor sea el factor crítico de cada miembro de la familia, menores posibilidades existirán de que un acuerdo de negociación se mantenga en el tiempo, ya que el conjunto de valores del factor de descuento será menor.

Suponemos que existe un proceso de negociación por el que cada individuo elige los niveles de consumo privado y de bien público familiar de acuerdo con la solución de negociación de Nash (1953)[3]. Es decir, se elige la trayectoria estacionaria que maximiza el producto de utilidades, normalizados por los niveles asociados a la solución no cooperativa, la cual constituye el punto de desacuerdo y bajo el supuesto de

[2] Véase Friedman (1971). Dicha estrategia de penalización no es la única posible (véase Abreu 1986).

[3] Una alternativa al modelo estático de negociación de Nash es el modelo de negociación dinámico con ofertas alternantes formulado por Rubinstein (1982). Dado que los agentes desconocen el momento en el que finaliza el juego y poseen el mismo factor de descuento, existe una equivalencia exacta entre la solución de negociación de Nash y el equilibrio obtenido en el modelo estratégico con riesgo de ruptura en el que los agentes poseen las mismas preferencias temporales, siempre que el intervalo temporal entre ofertas sucesivas tienda a cero (véase Binmore et al. 1986).

que los tres miembros de la familia poseen el mismo poder de negociación. Formalmente, el equilibrio cooperativo es el resultado del siguiente problema de optimización:

$$\underset{(C_1,C_2,C_3,l_1,l_2,l_3,h_1,h_2,h_3)}{\text{Max}} \quad N=\left[u_1+s(u_2+u_3)-W_1^I\right]\cdot\left[u_2+s(u_1+u_3)-W_2^I\right]\cdot\left[u_3+s(u_1+u_2)-W_3^I\right]$$

s.a.

$$\text{i) } C_1+C_2+C_3+\omega_1(l_1+h_1)+\omega_2(l_2+h_2)+\omega_3(l_3+h_3)\le Y_1+Y_2+Y_3$$

$$\text{ii) } C_1,C_2,C_3,l_1,l_2,l_3,h_1,h_2,h_3\ge 0$$

$$\text{iii) } Y_i=y_i+\omega_i T\ ,\ i=(1,2,3)$$

Del cumplimiento de las condiciones de primer orden y bajo la satisfacción de las condiciones suficientes, se derivan los niveles correspondientes a la solución de negociación:

$$l_2^C=\frac{1}{\omega_2};\ l_1^C=\frac{1}{\omega_1}\ l_3^C=\frac{1}{\omega_3}$$

$$h_1^C=\frac{(2-\alpha)}{\omega_1};\ h_2^C=\frac{(2-\alpha)}{\omega_2};\ h_3^C=\frac{(2-\alpha)}{\omega_3}$$

$$C_1^C=Y_1-3+\alpha;\ C_2^C=Y_2-3+\alpha;\ C_3^C=Y_3-3+\alpha$$

expresiones que dan lugar a los niveles de bienestar individual:

$$\begin{aligned}W_1^C&=Y_1+s(Y_2+Y_3)-(1+\alpha)\ln\omega_1-2s(1-\alpha)\ln\omega_1-(1+2s-\alpha)\ln\omega_2\omega_3+\\&+(1+2s)(\alpha-3+(2-\alpha)\ln[2-\alpha])\end{aligned}$$

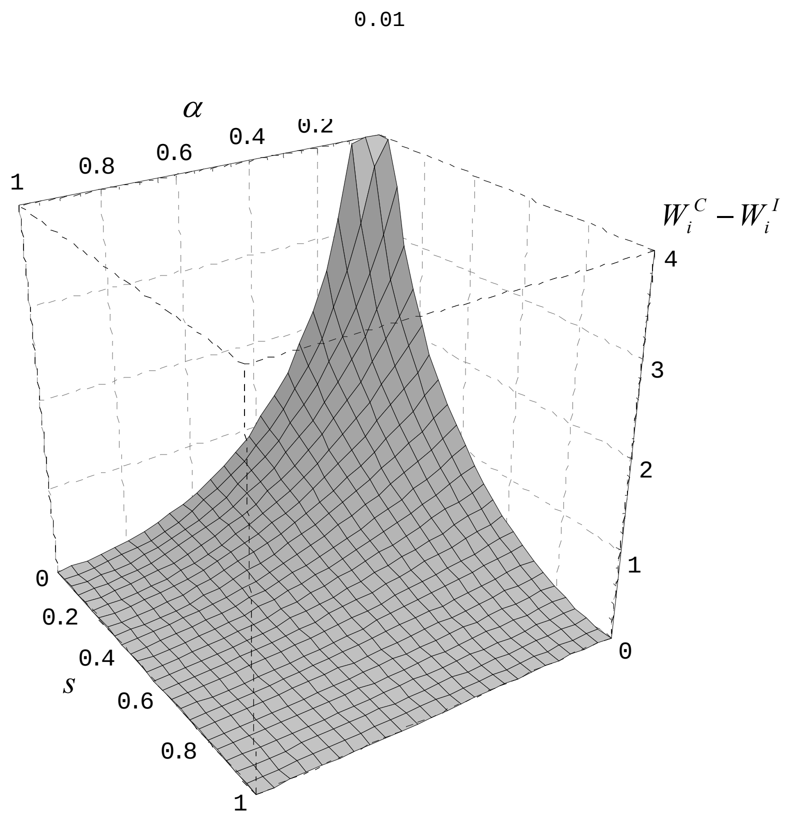
$$\begin{aligned}W_2^C&=Y_2+s(Y_1+Y_3)-(1+\alpha)\ln\omega_2-2s(1-\alpha)\ln\omega_2-(1+2s-\alpha)\ln\omega_1\omega_3+\\&+(1+2s)(\alpha-3+(2-\alpha)\ln[2-\alpha])\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W_3^C&=Y_3+s(Y_1+Y_2)-(1+\alpha)\ln\omega_3-2s(1-\alpha)\ln\omega_3-(1+2s-\alpha)\ln\omega_1\omega_2+\\&+(1+2s)(\alpha-3+(2-\alpha)\ln[2-\alpha])\end{aligned}$$

A continuación, vamos a calcular las ganancias de la cooperación para cada uno de los agentes, pudiendo así comprobar la primera de las condiciones que debemos exigir para que el anterior equilibrio sea estable, esto es, que dichas ganancias sean positivas para todos ellos. La expresión analítica es la siguiente:

$$W_i^C-W_i^I=(1+2s)(2\alpha-2+2s(1-\alpha)+(2-\alpha)\ln[2-\alpha]-(2-\alpha)\ln[\alpha+2s(1-\alpha)]);i=1,2,3$$

Con preferencias simétricas e iguales poderes de negociación, las ganancias de la cooperación se reparten equitativamente. En el Gráfico 1 podemos ver la evolución de la ganancia individual de la cooperación dependiendo de la valoración de la aportación personal al bien de producción familiar, así como del grado de altruismo de los agentes.



(*i=1,2,3*)

Como podemos observar en el Gráfico 1, la ganancia de la cooperación se mantiene decreciente respecto a la valoración subjetiva de la aportación personal al bien de producción familiar. También es manifiesto el efecto negativo que tiene el altruismo sobre las ganancias de la cooperación. Cuanto más se valora la utilidad del resto de miembros decisores de la familia, menor es la ganancia de utilidad de llegar a un acuerdo. Esto es así porque cuanto más se acerque la valoración personal de la utilidad del resto de miembros de la familia a la valoración de la propia, el resultado de un comportamiento individual independiente diferirá menos de uno consensuado, cuyo objetivo no es otro que tener en consideración las utilidades de todos los agentes implicados en la negociación. Fijándonos en el extremo de igual valoración de la utilidad propia y la del resto de miembros de la familia, $s=1$, podemos ver que la maximización de las utilidades individuales por separado en la situación de comportamiento independiente es equivalente al problema de *Nash* con idénticos poderes de negociación.

Con preferencias simétricas, será indiferente suponer cuál de los tres individuos se desvía. Una vez que lo decida, el problema de maximización al que se enfrentará dicho agente será:

$$\begin{aligned}
\underset{(C_i,l_i,h_i)}{\textbf{Max}} \quad & W_i = C_i + \ln l_i + \alpha \ln h_i + (1-\alpha)\ln h_j^C h_k^C + \\
& + s\left(C_j^C + \ln l_j^C + \alpha \ln h_j^C + (1-\alpha)\ln h_i h_k^C + C_k^C + \ln l_k^C + \alpha \ln h_k^C + (1-\alpha)\ln h_i h_j^C\right) \\
\textbf{s.a.} \quad & \textbf{i)}\ C_i + C_j^C + C_k^C + \omega_i (l_i + h_i) + \omega_j\left(l_j^C + h_j^C\right) + \omega_3\left(l_3^C + h_3^C\right) \le Y_i + Y_j + Y_3 \\
& \textbf{ii)}\ C_i, C_j^C, C_3^C, l_i, l_j^C, l_3^C, h_i, h_j^C, h_3^C \ge 0 \\
& \textbf{iii)}\ Y_i = y_i + \omega_i T
\end{aligned}$$

con *i,j,k*=(*1,2,3*), *i≠j≠k*.

Cuya resolución da lugar a los niveles de consumo privado y provisión de bien público familiar:

$$l_i^{NC} = \frac{1}{\omega_i}; \quad h_i^{NC} = \frac{\alpha + 2s(1-\alpha)}{\omega_i}; \quad C_i^{NC} = Y_i - 1 - \alpha - 2s(1-\alpha)$$

Así, las expresiones de las funciones indirectas de utilidad correspondientes a la situación en que el agente *i*-ésimo se desvía quedan como sigue:

$$\begin{aligned}
W_1^{NC} &= Y_1 + s(Y_2 + Y_3) - 1 - \alpha - 4s(2-\alpha) - (1 + \alpha + 2s(1-\alpha))\ln \omega_1 - (1 + 2s - \alpha)\ln \omega_2\omega_3 + \\
&+ 2(1 + s - \alpha)\ln[2-\alpha] + (\alpha + 2s(1-\alpha))\ln[(\alpha + 2s(1-\alpha))]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_2^{NC} &= Y_2 + s(Y_1 + Y_3) - 1 - \alpha - 4s(2-\alpha) - (1 + \alpha + 2s(1-\alpha))\ln \omega_2 - (1 + 2s - \alpha)\ln \omega_1\omega_3 + \\
&+ 2(1 + s - \alpha)\ln[2-\alpha] + (\alpha + 2s(1-\alpha))\ln[(\alpha + 2s(1-\alpha))]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_3^{NC} &= Y_3 + s(Y_1 + Y_2) - 1 - \alpha - 4s(2-\alpha) - (1 + \alpha + 2s(1-\alpha))\ln \omega_3 - (1 + 2s - \alpha)\ln \omega_1\omega_2 + \\
&+ 2(1 + s - \alpha)\ln[2-\alpha] + (\alpha + 2s(1-\alpha))\ln[(\alpha + 2s(1-\alpha))]
\end{aligned}$$

Analizando la estabilidad

Llegados a este punto, estamos en condiciones de analizar la estabilidad de la solución de negociación. Como se ha mencionado anteriormente, el mantenimiento de un acuerdo de negociación requiere que el factor de descuento (común para los tres agentes) sea menor o igual que su correspondiente factor crítico. Recordemos que, de acuerdo con la estrategia de penalización introducida, dicha condición es equivalente a afirmar que para cada uno de los miembros de la familia, las ganancias asociadas a la desviación no compensan a las pérdidas de la imposibilidad de volver a cooperar en el futuro.

Teniendo en cuenta la simetría entre los agentes e introduciendo los niveles de bienestar asociados al equilibrio cooperativo, no cooperativo y en desviación, se deduce la expresión:

$$\bar{\delta} = \frac{2(1-s)(1-\alpha)+(\alpha+2s(1-\alpha))(\ln[(\alpha+2s(1-\alpha))]-\ln[2-\alpha])}{-4s((1-\alpha)(1-s))+2(\alpha-1-s)(\ln[(\alpha+2s(1-\alpha))]-\ln[2-\alpha])}$$

La evolución de dicho factor con respecto a sus argumentos nos permite analizar la influencia del grado de altruismo y del parámetro α sobre la estabilidad de la solución de negociación.

En el Gráfico 2 podemos observar su comportamiento en tres dimensiones. No hemos incluido los valores de $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ y $s = 1$ en la representación por no hallarse definido el factor crítico de descuento para dichos valores, no introduciendo, por tanto, distorsiones en dicha presentación gráfica.

Una mayor valoración de la aportación individual al bien de producción familiar supone un mayor factor crítico de descuento y por tanto, un menor espacio posible de factores de descuento mayores que dicho valor crítico, un mayor conjunto de posibilidades de no mantener el acuerdo, y así una reducción en la estabilidad del mismo si llega a producirse. Respecto al altruismo, su efecto es claramente positivo sobre la estabilidad de la cooperación, de hecho, es la única variable analizada hasta el momento con dicho efecto sobre los factores críticos de descuento de todos los individuos de nuestra unidad familiar. Por tanto, estamos ante la fuente inequívoca de estabilidad en los acuerdos cooperativos a los que se puede llegar en una familia con tres agentes decisores. Su efecto es tan fuertemente negativo sobre el factor de descuento crítico definido en común para todos los miembros de nuestra unidad familiar que, ya para valores de $s > 0.2$, neutraliza el fuerte crecimiento que este factor experimenta en su desenvolvimiento con incrementos de α entre 0 y 0.15, y a partir de $s = 0.5$, el factor crítico de descuento se encuentra por debajo de 0.5 para cualquier valor de α.

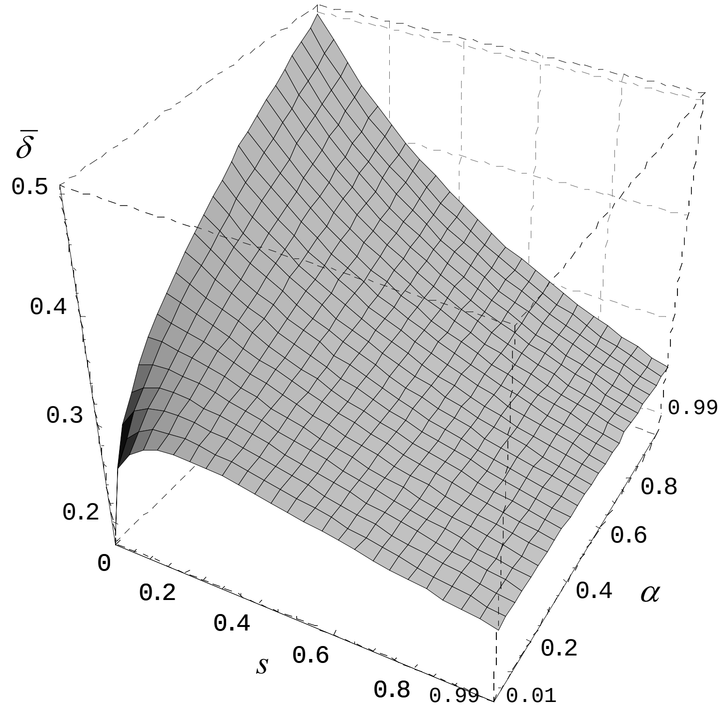


Gráfico 2

Para ver los efectos con más claridad, en los Gráficos 3 y 4 podemos observar desde otra perspectiva el efecto sobre el factor crítico de descuento de α y en el Gráfico 5 el efecto del altruismo representado por el parámetro s.

Respecto a α, hemos dividido la representación gráfica de su efecto sobre el factor crítico de descuento para valores de s por debajo y superiores a ½. El objetivo es ver que su efecto positivo sobre $\bar{\delta}$ se reduce cuanto mayor grado de altruismo muestran los agentes, pero se mantiene incluso para valores de s próximos a la unidad.

Como podemos observar en el Gráfico 5 más claramente todavía, cuanto mayor es el grado de altruismo menor es el factor crítico de descuento. Ese pequeño crecimiento que parece que existe para valores de $\alpha < 0.2$ nos indica que todavía con $s < 0.2$ no puede compensar el efecto negativo de la valoración subjetiva de la aportación personal al bien de producción familiar. La parcial del factor crítico de descuento respecto al grado de altruismo s la presentamos en la siguiente expresión, claramente negativa, como podemos ver en el Gráfico 6:

$$\frac{\partial \overline{\delta}}{\partial s} = \frac{(1-\alpha)(\ln[2-\alpha] - \ln[\alpha + 2s(1-\alpha)])}{2s(1-\alpha)(1-s) - (1+s-\alpha)(\ln[2-\alpha] - \ln[\alpha + 2s(1-\alpha)])} < 0$$

Gráfico 3
($0.01 \leq s \leq 0.5$)

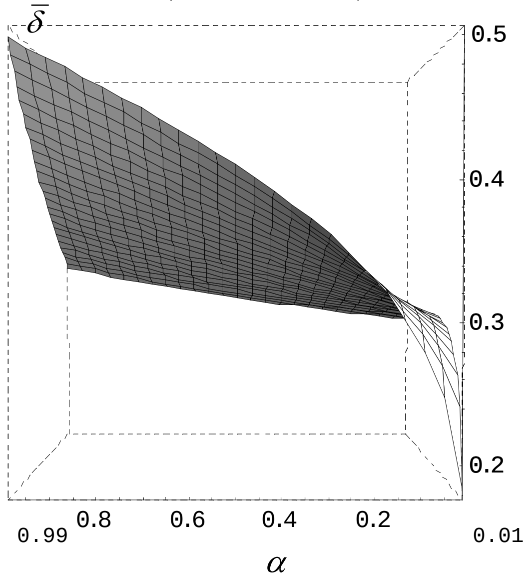


Gráfico 4
($0.5 \leq s \leq 0.99$)

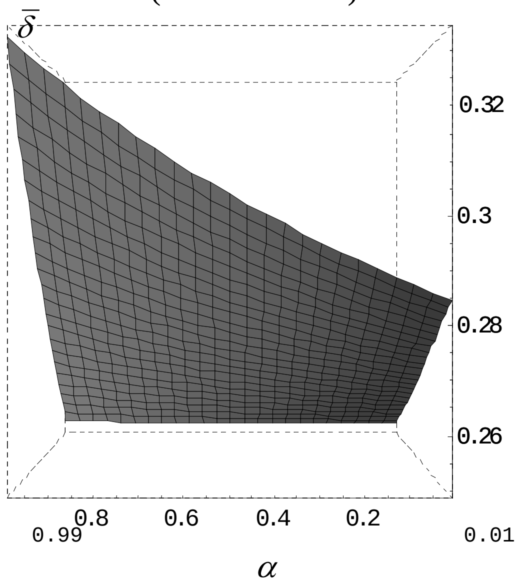


Gráfico 5

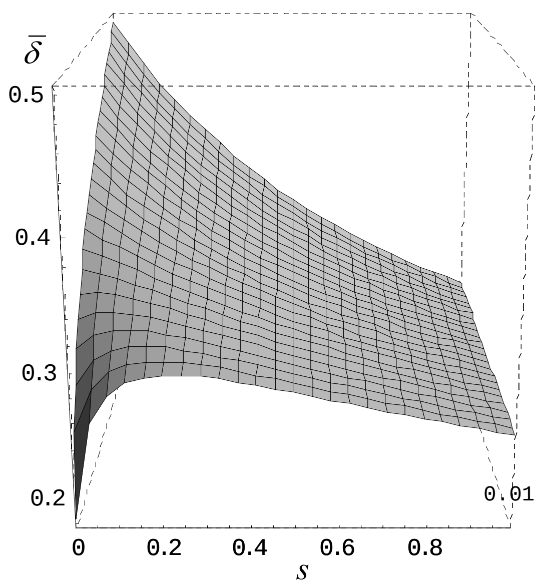
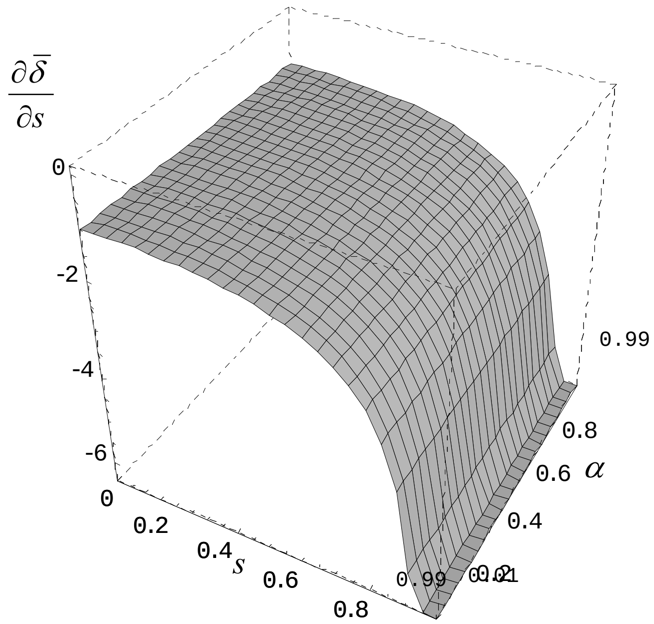


Gráfico 6



Asimetría en los poderes de negociación

A continuación reiteraremos el análisis de la estabilidad de los acuerdos en un contexto en el que los miembros de la unidad familiar poseen diferentes poderes de negociación. En concreto, distinguiremos entre el poder de negociación de los padres (agentes 1 y 2), al cual denotamos por β y el poder de negociación del hijo (agente 3) que viene dado por $(1-\beta)$, con $\beta \in [0,1]$.

La inclusión de dicha asimetría lleva consigo la aplicación de la solución de negociación de Nash generalizada, por lo que se verán afectados los niveles de equilibrio cooperativo y en desviación con respecto a los alcanzados en la situación anterior.

En concreto, el equilibrio asociado a la solución de negociación viene caracterizado por el problema de optimización:

$$\underset{(C_1,C_2,C_3,l_1,l_2,l_3,h_1,h_2,h_3)}{\text{Max}} \quad N=\left[u_1+s(u_2+u_3)-W_1^I\right]^{\beta}\cdot\left[u_2+s(u_1+u_3)-W_2^I\right]^{\beta}\cdot\left[u_3+s(u_1+u_2)-W_3^I\right]^{(1-\beta)}$$

$$\begin{aligned}
\text{s.a.}\quad & \text{i) } C_1+C_2+C_3+\omega_1(l_1+h_1)+\omega_2(l_2+h_2)+\omega_3(l_3+h_3)\le Y_1+Y_2+Y_3\\
& \text{ii) } C_1,C_2,C_3,l_1,l_2,l_3,h_1,h_2,h_3\ge 0\\
& \text{iii) } Y_i=y_i+\omega_i T\ ,\ i=(1,2,3)
\end{aligned}$$

Cuya resolución da lugar a los niveles de consumo de ocio, horas dedicadas al bien familiar y consumo privado:

$$l_1^C=\frac{1}{\omega_1};\ l_2^C=\frac{1}{\omega_2};\ l_3^C=\frac{1}{\omega_3};\ h_1^C=\frac{(2-\alpha)}{\omega_1};\ h_2^C=\frac{(2-\alpha)}{\omega_2};\ h_3^C=\frac{(2-\alpha)}{\omega_3}$$

$$C_1^C=Y_1+\frac{(-1-\alpha-2\beta)+(4s(1-2\beta)-5\beta)(1-\alpha)}{(1+\beta)}-\frac{(2-\alpha)(1-2\beta)(1+2s)}{(1+\beta)}(\ln[2-\alpha]+\ln[\alpha+2s(1-\alpha)])$$

$$C_2^C=Y_2+\frac{(-1-\alpha-2\beta)+(4s(1-2\beta)-5\beta)(1-\alpha)}{(1+\beta)}-\frac{(2-\alpha)(1-2\beta)(1+2s)}{(1+\beta)}(\ln[2-\alpha]+\ln[\alpha+2s(1-\alpha)])$$

$$C_3^C=Y_3-\frac{(7-5\alpha+2\beta\alpha)+(8s(1-2\beta)-5\beta)(1-\alpha)}{(1+\beta)}+2\frac{(2-\alpha)(1-2\beta)(1+2s)}{(1+\beta)}(\ln[2-\alpha]+\ln[\alpha+2s(1-\alpha)])$$

En este nuevo escenario, las ganancias de la cooperación pasan a depender también del poder de negociación de cada individuo. Haciendo uso de las expresiones precedentes, la obtención de las ganancias de la cooperación para los padres y el hijo es casi inmediata, (*i,j,k=1,2,3, i≠j≠k*):

$$\begin{aligned}
W_i^C-W_i^I &= C_i^C+s(C_j^C+C_k^C)+(1+2s)(2-\alpha)\ln[2-\alpha]-\\
&\quad -Y_i-s(Y_j+Y_k)-(1+2s)(2-\alpha)\ln[\alpha+2s(1-\alpha)]+(1+2s)(1+\alpha+2s(1-\alpha))=\\
&= C_i^C+s(C_j^C+C_k^C)-Y_i-s(Y_j+Y_k)+(1+2s)(1+\alpha+2s(1-\alpha))+\\
&\quad +(1+2s)(2-\alpha)(\ln[2-\alpha]-\ln[\alpha+2s(1-\alpha)])
\end{aligned}$$

Recordemos que con $\beta=(1-\beta)$ estas ganancias eran:

$$W_i^C-W_i^I=(1+2s)(2\alpha-2+2s(1-\alpha))+(1+2s)(2-\alpha)(\ln[2-\alpha]-\ln[\alpha+2s(1-\alpha)])$$

Si la evolución de esta ganancia individual de la cooperación respecto a α y s la podemos ver en el Gráfico 2, sólo necesitamos presentar lo que sucede para valores de $\beta>(1-\beta)$ y $\beta<(1-\beta)$ y compararlo con dicha evolución. En los Gráficos 7 y 8 podemos observar claramente cómo un mayor poder de negociación para los padres (un mayor β) les permite apropiarse de una mayor ganancia de la cooperación, para cualquier combinación de valoración subjetiva de la aportación personal al bien de producción familiar y nivel de altruismo, representados por los parámetros α y s.

Justo lo contrario de lo que ocurre para el caso del hijo adulto, ya que un mayor poder de negociación de sus progenitores supone un menor poder de negociación para él y, por tanto, se puede apropiar de una menor ganancia del acuerdo, Gráficos 9 y 10.

Gráfico 7

($\beta = 0.2, (i = 1,2)$)

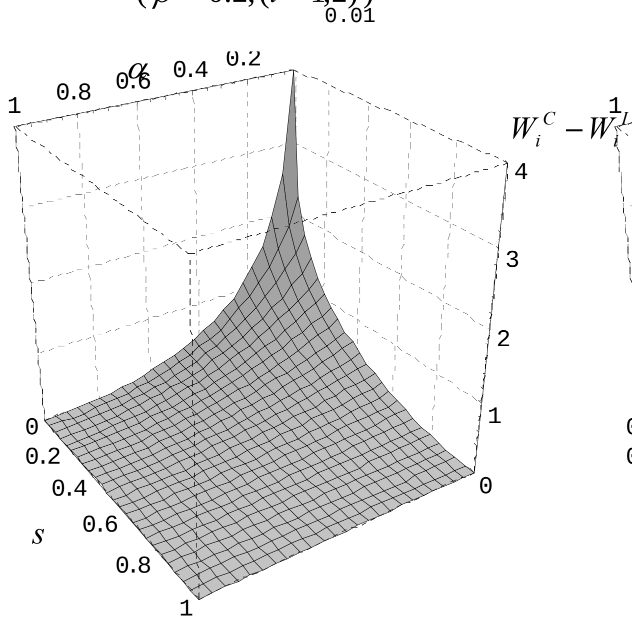


Gráfico 8

($\beta = 0.9, (i = 1,2)$)

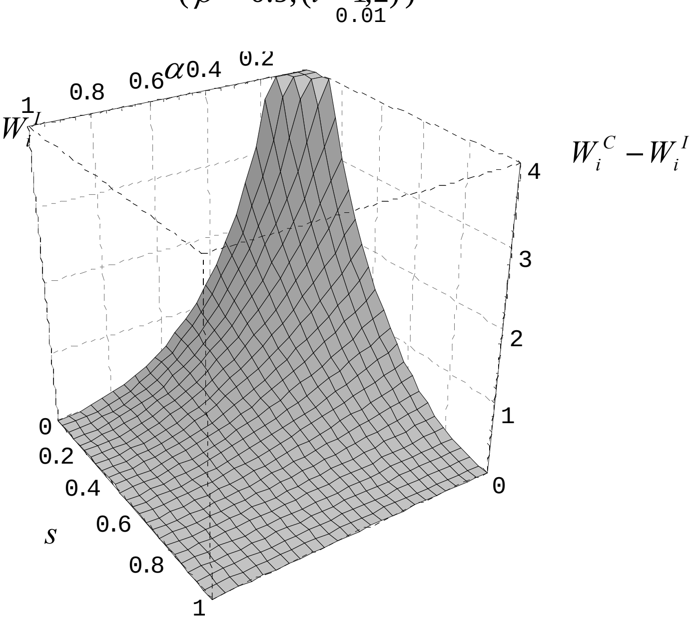


Gráfico 9

($\beta = 0.2$)

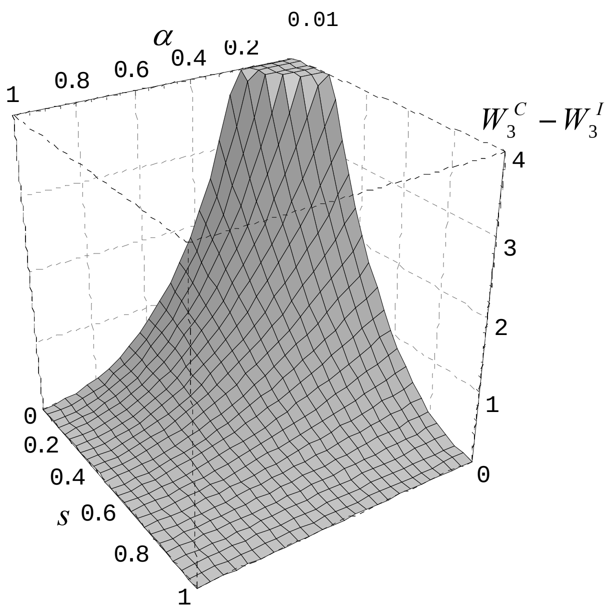
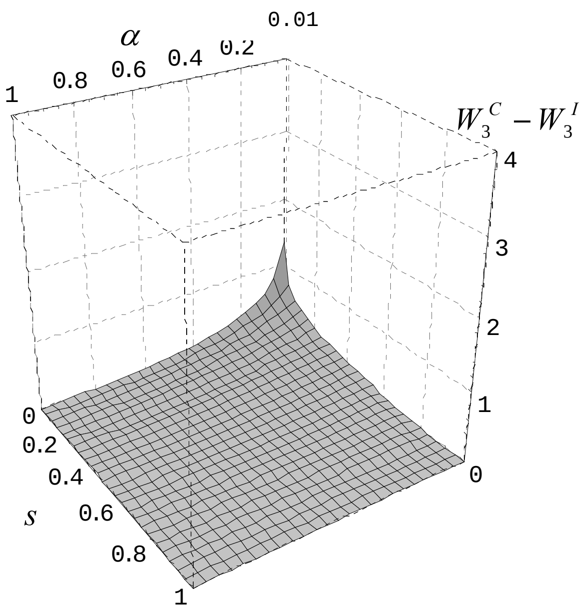


Gráfico 10

($\beta = 0.9$)



Podemos destacar, además en este caso, que la sensibilidad de las ganancias de la cooperación respecto al parámetro β es mucho mayor para el hijo que para los padres. Esto es así porque un aumento en β implica mayor poder de negociación tanto para el padre como para la madre, por lo que el efecto combinado es el doble sobre la ganancia de la cooperación del hijo; en este caso, menor ganancia para el hijo.

Veamos a continuación cómo evoluciona el factor crítico de descuento con variaciones en los poderes de negociación. Partimos de una base en la que la valoración subjetiva de la aportación individual al bien de producción familiar tiene un efecto positivo sobre este factor crítico y, por tanto, un efecto negativo sobre la estabilidad del acuerdo. Mientras que el nivel de altruismo reduce notablemente el factor crítico de descuento y, por tanto, tiene un fuerte efecto positivo sobre la estabilidad de la cooperación.

Las expresiones que nos permiten el cálculo de dicho factor de descuento crítico quedan como sigue de acuerdo a las expresiones precedentes, (*i,j,k=1,2,3*; *i≠j≠k*):

$$\begin{aligned} W_i^{NC} - W_i^C &= C_i^{NC} + s\left(C_j^C + C_k^C\right) + 2(1-\alpha+s)\ln[2-\alpha] + (\alpha + 2s(1-\alpha))\ln[\alpha + 2s(1-\alpha)] - \\ &- C_i^C - s\left(C_j^C + C_k^C\right) - (1+2s)(2-\alpha)\ln[2-\alpha] = \\ &= C_i^{NC} - C_i^C + (\alpha + 2s(1-\alpha))(\ln[\alpha + 2s(1-\alpha)] - \ln[2-\alpha]) \end{aligned}$$

Este primer término es idéntico para los tres agentes, dado que tanto las ganancias de la cooperación como de la desviación de dicha cooperación dependen del poder de negociación individual, y al operar obtenemos que (*i=1,2,3*):

$$W_i^{NC} - W_i^C = 2(1-\alpha)(1-s) - (\alpha + 2s(1-\alpha))(\ln[2-\alpha] - \ln[\alpha + 2s(1-\alpha)])$$

Ya que $\overline{\delta}_i = \dfrac{W_i^{NC} - W_i^C}{W_i^{NC} - W_i^I}$, veamos qué sucede con la segunda diferencia (*i,j,k=1,2,3*; *i≠j≠k*):

$$\begin{aligned} W_i^{NC} - W_i^I &= C_i^{NC} + s\left(C_j^C + C_k^C\right) + 2(1-\alpha+s)\ln[2-\alpha] + (\alpha + 2s(1-\alpha))\ln[\alpha + 2s(1-\alpha)] - \\ &- Y_i - s\left(Y_j + Y_k\right) - (1+2s)(2-\alpha)\ln[\alpha + 2s(1-\alpha)] + (1+2s)(1+\alpha+2s(1-\alpha)) = \\ &= C_i^{NC} + s\left(C_j^C + C_k^C\right) - Y_i - s\left(Y_j + Y_k\right) + (1+2s)(1+\alpha+2s(1-\alpha)) + \\ &+ 2(1-\alpha+s)(\ln[\alpha + 2s(1-\alpha)] - \ln[2-\alpha]) \end{aligned}$$

Las expresiones concretas para padres e hijo adulto son (*l=1,2*):

$$W_l^{NC} - W_l^{I} = \frac{2(1-\alpha)(1-s)(1-\beta(2+6s))}{(1+\beta)} -$$
$$- 2s\frac{(\alpha - 6\beta + 4\alpha\beta + 2(1-5\beta-\alpha(1-2\beta)))}{(1+\beta)}(\ln[2-\alpha] - \ln[\alpha + 2s(1-\alpha)])$$

$$W_3^{NC} - W_3^{I} = 2\frac{2(1-\alpha)(1-s)(2\beta - 3s(1-\beta)-1)}{(1+\beta)} +$$
$$+ 2s\frac{((3+5s)(1-\beta) - 2\beta s + \alpha((\beta-2)(1+s)+3\beta s))}{(1+\beta)}(\ln[2-\alpha] - \ln[\alpha + 2s(1-\alpha)])$$

En cualquier caso, dado que β representa el poder de negociación de cada padre, su efecto será opuesto para los padres y para el hijo, por lo que serán necesarios de nuevo cuatro gráficos.

En los Gráficos 11 y 12, *i*=(*1,2*), podemos ver que un mayor poder de negociación reduce notablemente el factor crítico de descuento de los padres para los mismos valores de α y s. Para verlo con claridad, fijémonos en la diferencia entre los máximos alcanzados, casi 0.7 para un $\beta = 0.2$, mientras que no alcanza el valor de 0.42 para un $\beta = 0.9$. También es observable que la pendiente de la superficie en el caso de mayor poder de negociación de los padres es más pronunciada, por lo que, no sólo cuanto mayor es éste poder menor es el máximo que alcanza su factor crítico de descuento, sino que decrece con mayor rapidez cuando s aumenta; más claramente con valores altos de α.

Gráfico 11
($\beta = 0.2, (i = 1,2)$)

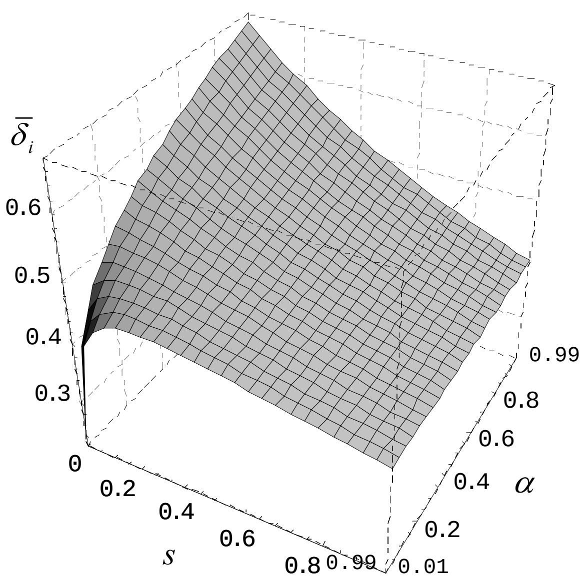
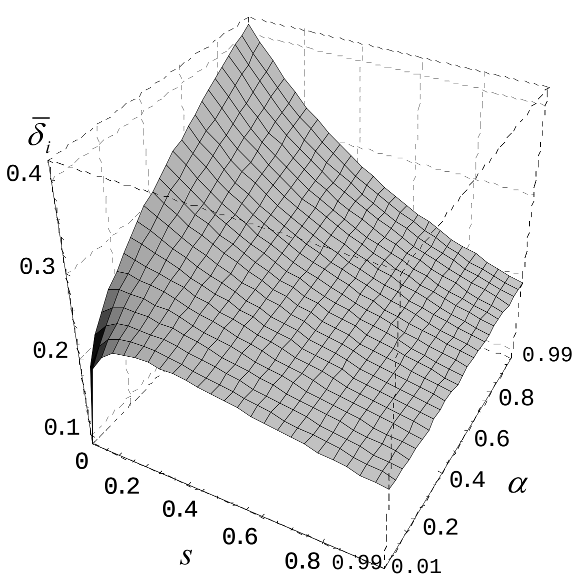


Gráfico 12
($\beta = 0.9, (i = 1,2)$)



Para el hijo adulto ocurre justamente lo contrario, Gráficos 13 y 14, de tal forma que mayor poder de negociación de sus padres implica un mayor factor crítico de descuento para los mismos pares (α, s). Es más, en nuestro ejemplo, con $\beta = 0.9$ el mínimo que se alcanza se sitúa muy por encima del máximo valor que toma el factor crítico de descuento del hijo adulto con $\beta = 0.2$. Además, es evidente una menor sensibilidad respecto a la variable altruismo, s, en el caso de poderes de negociación de los padres altos ya que, al desplazamiento de la superficie, se suma una pendiente más suave, más apreciable cuanto mayor es α.

Gráfico 13
($\beta = 0.2$)

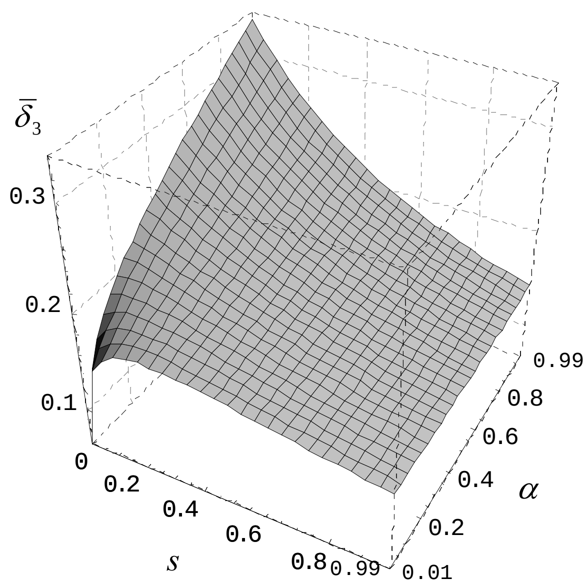
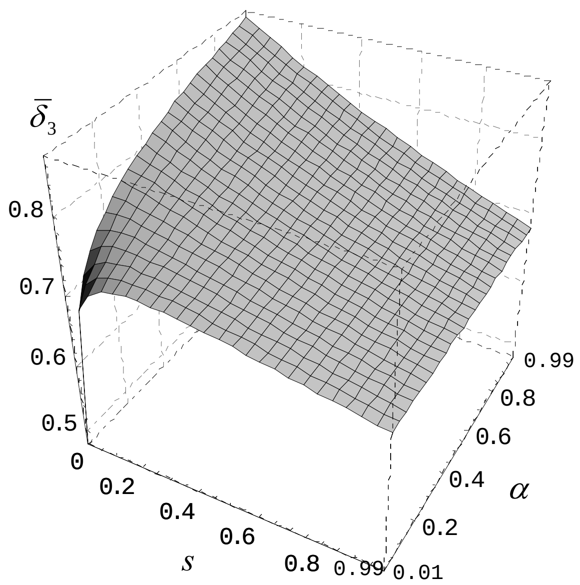


Gráfico 14
($\beta = 0.9$)



Conclusiones

En este trabajo nuestro objetivo ha sido analizar la estabilidad de los acuerdos o comportamiento cooperativo que podían manifestar los tres agentes decisores pertenecientes a la misma unidad familiar, identificados como padres e hijo adulto. Esta estabilidad debía ser entendida como la no existencia de incentivos a romper los acuerdos de cooperación.

Para realizar este análisis, ha sido necesario moverse dentro de los modelos colectivos de comportamiento familiar hacia aquellos que contemplaban la posibilidad de comportamientos no cooperativos y que, además, hacían uso de una metodología que permitía el análisis matemático del proceso de toma de decisiones. Recordemos que en los modelos colectivos *à la Chiappori* no se explicita el proceso de negociación mediante el cual se llegaba a la obtención de la regla de reparto, siendo ésta la síntesis de dicho proceso. Este tipo de modelos eran aquellos que hacían uso de la teoría de la negociación aplicada a la toma de decisiones intrafamiliar.

Bajo una especificación funcional concreta y mediante la inclusión sucesiva de diversos factores, se ha analizado la estabilidad de un equilibrio cooperativo *à la Nash* entre los tres agentes decisores considerados. La fuente de la potencial cooperación entre los agentes ha sido, inicialmente, la existencia de un bien público de producción familiar cuyos factores productivos eran las horas de trabajo aportadas por cada uno de los miembros.

Con iguales poderes de negociación, cuanto más valora un agente su aportación al bien público de producción familiar, es decir, cuanto más importante considera su aportación al bien fuente de la potencial cooperación, menor es la estabilidad de la cooperación.

La introducción del poder de negociación de padres e hijo nos ha permitido, por un lado, la inclusión de una variable importante a la hora de obtener o deducir equilibrios cooperativos entre agentes y, por otro, el modo en que lo hemos hecho, a efectos prácticos, es como si los padres formasen una coalición frente a su hijo adulto. El poder de negociación que manifiestan frente a su hijo es común, β, por lo que el poder de negociación del hijo será $(1-\beta)$.

Con poderes de negociación diferenciados el efecto de α se mantiene. Mayor poder de negociación de los padres les permite apropiarse de mayores ganancias de la cooperación y poseer menores incentivos a desviarse de un acuerdo cooperativo. Al maximizar cada individuo un índice de bienestar, combinación lineal de las utilidades de todos los miembros decisores considerados de la unidad familiar, una variación del poder de negociación en un sentido u otro afecta con mayor fuerza tanto a las ganancias de la cooperación, como a los incentivos a desviarse del hijo adulto.

En general, la existencia de altruismo, incluso si una de las partes acapara la mayor parte del poder negociador, reduce notablemente los valores de los factores críticos de descuento individuales. Es decir, aumenta la probabilidad de que el factor de descuento individual real se encuentre por encima del crítico y, por tanto, se reduzca la probabilidad de que existan incentivos de ruptura del acuerdo cooperativo al que se puede llegar. Un mayor grado de altruismo aumenta la estabilidad de la cooperación, por encima de cualquier efecto contrario de los otros factores considerados.

Referencias bibliográficas

ABREU, D. (1986) “External equilibria of oligopolistic supergames”, *Journal of Economic Theory*, 39, 191-225.

ANDALUZ, J. y MOLINA J.A. (2007) "How do altruistic parental transfers affect the welfare gains of marriage?. Research in Economics 61, pp. 1-9.

BINMORE, K., RUBINSTEIN, A. y WOLINSKY, A. (1986) “The Nash bargaining solution in economic modelling”, *Rand Journal of Economics*, Vol. 17, Nº 2, 176-188.

BOURGUIGNON, F. y CHIAPPORI, P.-A. (1992) “Collective models of household behavior, An introduction”, *European Economic Review*, 36, 355-364.

CHEN, Z. y WOOLLEY, F. (2001): “A Cournot-Nash Model of Family Decision Making”. *The Economic Journal* 3, pp. 722-748.

FRIEDMAN, J.W. (1971) “A Non-cooperative equilibrium for Supergames”, *Review of Economic Studies*, 38, 1-12.

LUNDBERG y POLLAK (1993): “Separate Spheres Bargaining and the Marriage Market”. *Journal of Political Economy* 101, pp. 988-1010.

LUNDBERG Y POLLAK (1994): “Noncooperative Bargaining Models of Marriage”. *The American Economic Review* 84, pp. 132-137.

LUNDBERG, S. y POLLAK, R. (2003) “Efficiency in Marriage.” *Review of Economics of the Household*, 1, 153-167.

MANSER, M. y BROWN, M. (1980) “Marriage and household decision-making: a bargaining analysis”. *International Economic Review*, 21, 31–44.

MCELROY, M. y HORNEY, M. (1981) “Nash-bargained household decisions: toward a generalization of the theory of demand”. *International Economic Review*, 22, 333–349.

NASH, J.F. (1953) “Two-Person Cooperative Games”, *Econometrica,* 21, 128-140.

RUBINSTEIN, A. (1982) “Perfect Equilibrium in a bargaining model”, *Econometrica,* Vol. 50, Nº 1. 97-109